

УДК 532.59

ВИЗНАЧЕННЯ ВИГЛЯДУ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ЕКОНОМІЧНИМИ ПОКАЗНИКАМИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМ ШЛЯХОМ

В.А. Кушнір, Г.А. Кушнір, В.В. Кравченко

Створена технологія визначення функціональної залежності між економічними показниками на основі експериментальних даних за допомогою комп'ютерного експерименту з використанням EXCEL-технології на основі математичної моделі лінійної оптимізації, що допомагає вибрати оптимальний план розвитку підприємства, бізнес-плану, інженерного проекту.

There has been the functional dependence established between the economic indices on the basis of experimental data processed with the help of computer experiment using EXCEL technology taken as grounds of mathematic model of linear optimum which helps to chose the most appropriate plan for the organization development, business plan or engineering project.

В економіці підприємств, управлінні різними проектами, при створенні різних бізнес-проектів, проектуванні складних інженерних пристроїв і машин виникає необхідність максимальної користі певного показника Y (процент зростання якості чи розвитку, прибутку, надійності, стійкості та ін.) при мінімальних затратах ресурсів C (коштів, людських ресурсів, матеріалів, часу і т.д.). У теоретичному плані така задача приводить до побудови MINMAX математичної моделі [3; 6] (як правило нелінійної) з наступним відшукуванням сідловидної точки (теорема Куна-Таккера [3; 6]). Однак на практиці як побудова математичної моделі, так і алгоритму відшукування сідловидної точки пов'язані зі значними труднощами, зокрема, сідловидна точка може не входити у допустимі значення параметрів. Тоді виникає проблема побудови виду функції, яка зв'язувала б два конкуруючі (MAX і MIN) показники Y і C . Окрім того ресурс C потрібно оптимально розподілити за певними правилами (і відповідними математичними моделями) між економічними, інженерними чи іншої природи показниками (параметрами) x_1, x_2, \dots, x_n . Збільшуючи значення параметрів x_1, x_2, \dots, x_n , збільшується і значення цільової функції Y . Однак водночас зростають і затрати C . Відомо, що при зростанні показника x_i на одну одиницю потрібно понести p_i одиниць затрат відповідного ресурсу. У багатьох задачах інженерного і економічного характеру постановка даної задачі набуває такого конкретного вигляду. Значення Y і C визначаються як лінійні функції від приросту змінних $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, від яких знаходиться експертним шляхом, зокрема, Y може визначатися на основі табличних числових даних як функція лінійної регресії за допомогою методу найменших квадратів [1; 4; 5] і STATGRAFICS-технології [2], а вигляд функції C визначається значеннями приросту змінних $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ і затратними вартостями p_1, p_2, \dots, p_n на збільшення значення відповідної змінної на одну одиницю:

$$Y = q_1 * \Delta x_1 + q_2 * \Delta x_2 + \dots + q_n * \Delta x_n, \quad (1)$$

$$C = p_1 * \Delta x_1 + p_2 * \Delta x_2 + \dots + p_n * \Delta x_n, \quad (2)$$

при обмеженнях

$$0 \leq \Delta x_1 \leq b_1 \quad 0 \leq \Delta x_2 \leq b_2, \quad (3)$$

.....

$$0 \leq \Delta x_n \leq b_n.$$

Якби не було б обмежень на затрати C , то математичною моделлю була б задача: знайти

$$\text{MAX}_Y \quad (4)$$

при обмеженнях (3). Однак, завжди існують обмеження на затрати C . Тоді з'явиться ще одне обмеження у вигляді (2). Отже (4), (3) і (2) є математичною моделлю оптимізації функції Y (1) при обмеженнях (3) і (2). Побудована модель (4), (3), (2) експериментально за допомогою інформаційної EXCEL-технології [4; 6] (чи іншої технології, що дозволяє розв'язувати задачу лінійного програмування) дозволяє побудувати у програмованому режимі функціональну залежність між можливими затратами C і корисністю Y у табличному вигляді. Оскільки функція Y лінійна, то функціональна залежність

$$Y = F(C) \quad (5)$$

отримується як точний аналітичний вираз. Продемонструємо це прикладом.

Експериментально отримано вираз функції Y (приріст якості праці на виробництві об'єднання "Червона Зірка") за методом найменших квадратів як лінійну функцію регресії [2]:

$$Y = 0,125584 * \Delta x_1 + 2,49054 * \Delta x_2 - 1,44896 * \Delta x_3 - 4,02061 * \Delta x_4 + 0,57212 * \Delta x_5 + 0,391112 * \Delta x_6, \quad (6)$$

де x_1 – організація робочого місця, x_2 – санітарно-гігієнічні умови, x_3 – складність праці, x_4 – монотонність праці, x_5 – матеріальні стимули, x_6 – технічно-обґрунтовані норми, причому

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Delta x_1 \leq 30 \\ 0 &\leq \Delta x_2 \leq 2 \\ -2 &\leq \Delta x_3 \leq 0 \\ -2 &\leq \Delta x_4 \leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$0 \leq \Delta x_5 \leq 15$$

$$0 \leq \Delta x_6 \leq 20,$$

$$\text{та } 12 * \Delta x_1 + 1,6 * \Delta x_2 - 69 * \Delta x_3 - 150 * \Delta x_4 + 6,5 * \Delta x_5 + 8400 * \Delta x_6 = C. \quad (8)$$

Змінюючи значення C і розв'язуючи при кожному значенні C задачу лінійного програмування, (знайти MAX_Y функції (6) при обмеженнях (7) і (8)), ми знаходимо функціональну залежність між затратами C і значенням функції корисності Y з одночасним оптимальним розподілом затрат, що і показано у наступній таблиці 2 (взято із EXCEL) [4; 6]. У таблиці 1 відображена математична модель у Excel-технології.

Таблиця 1.

імя	змінні						Вид
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
значення	0,941667		2	-2	-2	15	0
НГ		0	0	-2	-2	0	0
ВГ		30	2	0	0	15	20
Коеф. ЦФ	0,125584	2,49054	-1,44896	-4,02061	0,57212	0,391112	24,62028
Обмеження							
вартість	12	1,6	-69	-150	6,5	8400	550 Равно 550

Із таблиці 1 видно, що при затратах у 550 гривень на одного робітника отримується приріст корисності в 24,62028 одиниць. У програмованому режимі в EXCEL отримали таку таблицю 2, що виражає залежність значень цільової функції Y від затрат C :

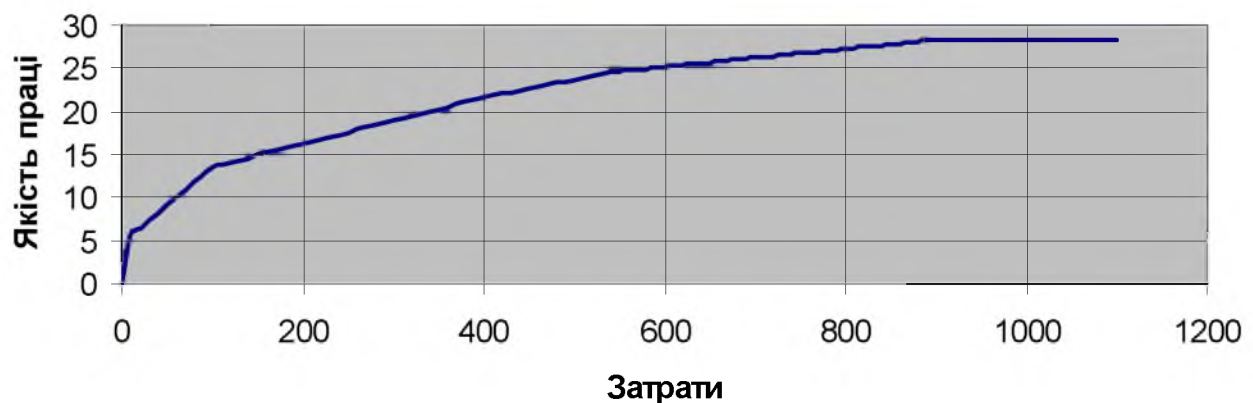
Таблиця 2.

затрати	якість пр.	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Y
0	0	0	0	0	0	0	0	66,04152
10	5,579606	0	2	0	0	1,046154	0	71,621126
20	6,45979	0	2	0	0	2,584615	0	72,50131
30	7,339975	0	2	0	0	4,123077	0	73,381495
40	8,220159	0	2	0	0	5,661538	0	74,261679
50	9,100344	0	2	0	0	7,2	0	75,141864
60	9,980529	0	2	0	0	8,738462	0	76,022049
70	10,86071	0	2	0	0	10,27692	0	76,90223
80	11,7409	0	2	0	0	11,81538	0	77,78242
90	12,62108	0	2	0	0	13,35385	0	78,6626
100	13,50127	0	2	0	0	14,89231	0	79,54279
110	13,81216	0	2	0	-0,062	15	0	79,85368
120	14,0802	0	2	0	-0,1286667	15	0	80,12172
130	14,34828	0	2	0	-0,1953333	15	0	80,3898
140	14,616228	0	2	0	-0,262	15	0	80,657748
150	14,88432	0	2	0	-0,3286667	15	0	80,92584
160	15,15236	0	2	0	-0,3953333	15	0	81,19388
170	15,4204	0	2	0	-0,462	15	0	81,46192
180	15,68044	0	2	0	-0,5286667	15	0	81,72196
190	15,95648	0	2	0	-0,5953333	15	0	81,998
200	16,22452	0	2	0	-0,662	15	0	82,26604
210	16,49256	0	2	0	-0,7286667	15	0	82,53408
220	16,76061	0	2	0	-0,7953333	15	0	82,80213
230	17,02865	0	2	0	-0,862	15	0	83,07017
240	17,29669	0	2	0	-0,9286667	15	0	83,33821
250	17,56473	0	2	0	-0,9953333	15	0	83,60625
260	17,83277	0	2	0	-1,062	15	0	83,87429
270	18,10081	0	2	0	-1,1286667	15	0	84,14233
280	18,36885	0	2	0	-1,1953333	15	0	84,41037
290	18,63689	0	2	0	-1,262	15	0	84,67841
300	18,90493	0	2	0	-1,3286667	15	0	84,94645
310	19,17297	0	2	0	-1,3953333	15	0	85,21449
320	19,44101	0	2	0	-1,462	15	0	85,48253
330	19,70905	0	2	0	-1,5286667	15	0	85,75057
340	19,977093	0	2	0	-1,5286667	15	0	86,018613

350	20,24513	0	2	0	-1,5953333	15	0	86,28665
360	20,51313	0	2	0	-1,7286667	15	0	86,55465
370	20,78122	0	2	0	-1,7953333	15	0	86,82274
380	21,04926	0	2	0	-1,862	15	0	87,09078
390	21,3173	0	2	0	-1,862	15	0	87,35882
400	21,58534	0	2	0	-1,9953333	15	0	87,62686
410	21,79939	0	2	-0,1347826	-2	15	0	87,84091
420	22,00939	0	2	-0,2797101	-2	15	0	88,05091
430	22,21938	0	2	-0,4246377	-2	15	0	88,2609
440	22,42938	0	2	-0,5695652	-2	15	0	88,4709
450	22,63937	0	2	-0,7144928	-2	15	0	88,68089
460	22,84937	0	2	-0,8594203	-2	15	0	88,89089
470	23,05936	0	2	-1,0043478	-2	15	0	89,10088
480	23,26935	0	2	-1,1492754	-2	15	0	89,31087
490	23,47935	0	2	-1,2942029	-2	15	0	89,52087
500	23,68934	0	2	-1,4391304	-2	15	0	89,73086
510	23,89934	0	2	-1,584058	-2	15	0	89,94086
520	24,10933	0	2	-1,7289855	-2	15	0	90,15085
530	24,31933	0	2	-1,873913	-2	15	0	90,36085
540	24,51562	0,108333	2	-2	-2	15	0	90,55714
550	24,62028	0,941667	2	-2	-2	15	0	90,6618
560	24,7293	1,775	2	-2	-2	15	0	90,77082
570	24,82958	2,608333	2	-2	-2	15	0	90,8711
580	24,9324	3,441667	2	-2	-2	15	0	90,97392
590	25,03889	4,275	2	-2	-2	15	0	91,08041
600	25,14354	5,108333	2	-2	-2	15	0	91,18506
610	25,2482	5,941667	2	-2	-2	15	0	91,28972
620	25,35285	6,775	2	-2	-2	15	0	91,39437
630	25,4575	7,608333	2	-2	-2	15	0	91,49902
640	25,56216	8,441667	2	-2	-2	15	0	91,60368
650	25,66681	9,275	2	-2	-2	15	0	91,70833
660	25,77146	10,10833	2	-2	-2	15	0	91,81298
670	25,87612	10,94167	2	-2	-2	15	0	91,91764
680	25,98077	11,775	2	-2	-2	15	0	92,02229
690	26,08542	12,60833	2	-2	-2	15	0	92,12694
700	26,19008	13,44167	2	-2	-2	15	0	92,2316
710	26,29473	14,275	2	-2	-2	15	0	92,33625
720	26,39938	15,10833	2	-2	-2	15	0	92,4409
730	26,50404	15,94167	2	-2	-2	15	0	92,54556
740	26,60869	16,775	2	-2	-2	15	0	92,65021
750	26,71334	17,60833	2	-2	-2	15	0	92,75486
760	26,818	18,44167	2	-2	-2	15	0	92,85952
770	26,92265	19,275	2	-2	-2	15	0	92,96417
780	27,0273	20,10833	2	-2	-2	15	0	93,06882
790	27,13196	20,94167	2	-2	-2	15	0	93,17348
800	27,23661	21,775	2	-2	-2	15	0	93,27813
810	27,34126	22,60833	2	-2	-2	15	0	93,38278
820	27,44592	23,44167	2	-2	-2	15	0	93,48744
830	27,55057	24,275	2	-2	-2	15	0	93,59209
840	27,65522	25,10833	2	-2	-2	15	0	93,69674
850	27,75988	25,94167	2	-2	-2	15	0	93,8014
860	27,8653	26,775	2	-2	-2	15	0	93,90682
870	27,96918	27,60833	2	-2	-2	15	0	94,0107
880	28,07384	28,44167	2	-2	-2	15	0	94,11536
890	28,17849	29,275	2	-2	-2	15	0	94,22001
900	28,2696	30	2	-2	-2	15	0,000155	94,31112

910	28,27007	30	2	-2	-2	15 0,001345	94,31159
920	28,27053	30	2	-2	-2	15 0,002536	94,31205
930	28,271	30	2	-2	-2	15 0,003726	94,31252
940	28,27146	30	2	-2	-2	15 0,004917	94,31298
950	28,27193	30	2	-2	-2	15 0,006107	94,31345
960	28,27239	30	2	-2	-2	15 0,007298	94,31391
970	28,27286	30	2	-2	-2	15 0,008488	94,31438
980	28,27333	30	2	-2	-2	15 0,009679	94,31485
990	28,27379	30	2	-2	-2	15 0,010869	94,31531
1000	28,27426	30	2	-2	-2	15 0,01206	94,31578
1010	28,27472	30	2	-2	-2	15 0,01325	94,31624
1020	28,27519	30	2	-2	-2	15 0,01444	94,31671
1030	28,27565	30	2	-2	-2	15 0,015631	94,31717
1040	28,27612	30	2	-2	-2	15 0,016821	94,31764
1050	28,27658	30	2	-2	-2	15 0,018012	94,3181
1060	28,27705	30	2	-2	-2	15 0,019202	94,31857
1070	28,27752	30	2	-2	-2	15 0,020393	94,31904
1080	28,27798	30	2	-2	-2	15 0,021583	94,3195
1090	28,27845	30	2	-2	-2	15 0,022774	94,31997
1100	28,27891	30	2	-2	-2	15 0,023964	94,32043
2000	28,3208	30	2	-2	-2	15 0,131107	
3000	28,36738	30	2	-2	-2	15 0,250155	
20000	29,15891	30	2	-2	-2	15 2,273964	
30000	29,62452	30	2	-2	-2	15 3,46444	

З **таблиці 2** видно динаміку змін оптимального розподілу затрат C та залежність якості праці Y від затрат C . Оптимізація задачі лінійного програмування (11), (12), (13) відбувається тільки у послідовному використанні змінних $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, що впливає із **таблиці 2**. Можна у середовищі EXCEL побудувати графік функції $Y=F(C)$ за точками **таблиці 2**:



Малюнок 1.

Будуємо графік у вигляді ламаної лінії. Між точками переходу будуть відрізки прямих. Знайдемо аналітичний вираз рівнянь прямих, яким належать ланки ламаної. Рівняння знаходимо за двома точками. Для цього складемо допоміжну таблицю 3:

Таблиця 3.

с	різниця	У	різн. У	різн. С
0	0	66,04152	13,54528	100,5
100,5	13,54528	79,5868	8,07352	300,7
401,2	21,6188	87,66032	2,87902	137,3
538,5	24,49782	90,53934	3,76963	360
898,5	28,26745	94,30897	0,01146	201,5
1100	28,27891	94,32043		

Користуючись таблицею 3, після певних розрахунків одержуємо рівняння ланок ламаної як рівняння прямих за двома точками:

- 1) Перша ланка: $Y=0,134781 \cdot C, C \in [0; 100,5]$.
- 2) Друга ланка: $Y=0,026867 \cdot C + 10,84267, C \in [100,5; 401,2]$.
- 3) Третя ланка: $Y=0,02105 \cdot C + 13,19982, C \in [401,2; 538,5]$.
- 4) Четверта ланка: $Y=0,0104715 \cdot C + 18,85908, C \in [538,5; 898,5]$.
- 5) П'ята ланка: $Y=0,0000073 \cdot C + 27,75568, C \in [898,5; 1100]$.

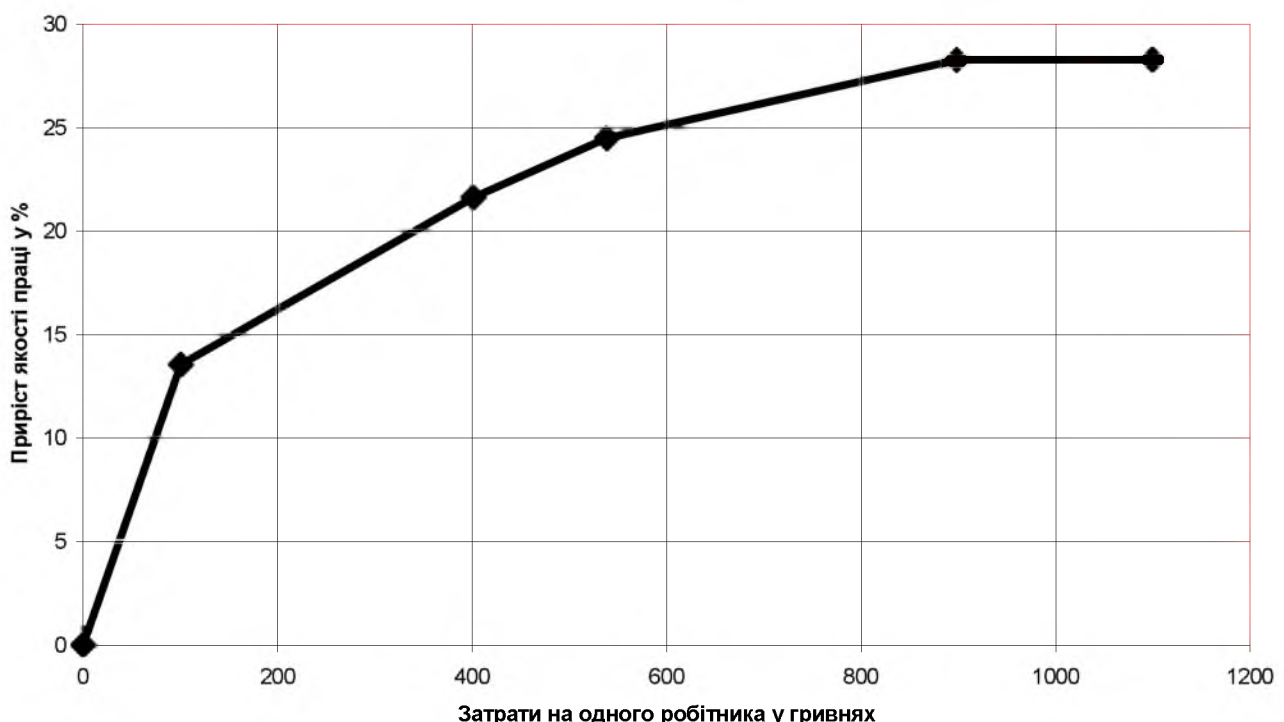
Отримуємо графік функції

$$Y=F(C)$$

у вигляді ламаної лінії, що дозволяє наочно спостерігати функціональну залежність між затратами C і зростанням якості праці Y . Отримана ламана вгнута, що відображає загальну тенденцію розвитку природних, економічних, соціальних процесів, а саме: зі збільшенням затрат C корисність Y не зростає у прямій пропорції, а зростання уповільнюється і, як видно із графіку (малюнок 2), на певному етапі майже припиняється.

Малюнок 2.

Залежність між затратами на зростання якості праці і відповідним зростанням якості праці у %



Наведена математична модель і технологія експериментального дослідження процесу розвитку за допомогою інформаційно-комп'ютерних технологій дозволяє вибрати оптимальний план розвитку підприємства, бізнес-план, інженерний проект, тощо.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Берк К., Кэйри П. Анализ данных с помощью Microsoft Excel.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 560 с.
2. Дюк В.А. Обработка данных в ПК в примерах и задачах. – Санкт-Петербург: Питер, 1997. – 240 с.
3. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2—5. – 608 с.
4. Мур Д., Уэдерфорд Л.Р. Экономическое моделирование в Microsoft Excel, 6-е изд.: Перевод с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.
5. Справочник по математике для экономистов / В.Е.Барбаумов, В.И.Ермаков, Н.Н.Кривенцова и др. ; Под ред. В.И.Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.
6. Таха Х.А. Введение в исследование операций, 7-е издание, : Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

*Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка*

Надійшло 4 березня 2006 р.